

ГРУБІ МОДЕЛІ РОЗВИТКУ В МЕДИЦИНІ

В.Л. Шевченко¹, А.В. Шевченко²

*Національна академія оборони України
Національна медична академія післядипломної освіти імені П.Л. Шупика²*

Проаналізовані особливості використання лінійних, експоненціальних логістичних моделей розвитку. Запропоновані алгоритми трансформування лінійних та експоненціальних моделей в логістичні без втрати накопленої інформації щодо властивостей об'єкта моделювання.

Ключові слова: прогноз, моделі розвитку, логістична функція, трансформація моделей.

ГРУБЫЕ МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ В МЕДИЦИНЕ

В.Л.Шевченко¹, А.В. Шевченко²

*Национальная академия обороны Украины
Национальная медицинская академия последипломного образования
имени П.Л. Шупика²*

Проанализированы особенности линейных, экспоненциальных моделей развития. Предложены алгоритмы трансформирования линейных и экспоненциальных моделей в логистические без утраты накопленной информации по свойствам объекта моделирования.

Ключевые слова: прогноз, модели развития, логистическая функция, трансформация моделей.

ROUGH GROWTH MODELS FOR MEDICINE

V.L. Shevchenko¹, A.V. Shevchenko²

*National Defense Academy of Ukraine
National Medical Academy of Post-Graduate Education by P.L. Shupyk²*

Features of linear, exponential and logistic development models are analyzed. Algorithm of transforming linear and exponential models to logistic ones without modeling object informational losses is proposed.

Key words: prognosis, growth models, logistic function, models transformation.

Вступ. Практика висуває до моделей суперечні умови: оперативність, точність, наочність, повнота врахування чинників впливу тощо. "Для того, щоб система моделей давала опис, що добре відображає реальність, вона має бути достатньо складною. Але в такому випадку кожен машинний експеримент буде вимагати великих витрат машинного часу. А це значить, що провести велику кількість експериментів - необхідна умова будь-якого аналізу - буває просто неможливо" [1]. Складність моделі має відповідати складності процесу та, з другого боку, можливості щодо забезпечення вхідними даними. Чим складніша модель, тим складніше забезпечити її вхідними даними, тим вищий ступінь невизначеності, в якій вона функціонує. Чим вищий ступінь невизначеності об'єк-

та, що моделюється, тим простішою має бути модель. І.Пригожин пов'язує необхідність простоти моделей з властивостями самого об'єкта моделювання [2]: "Вимога "грубості" за своєю природою відображає не обмеженість наших можливостей виконувати спостереження та вимірювання, а внутрішню структуру явищ, які ми описуємо". Грубі моделі можуть використовувати навіть фахівці без спеціальної математичної підготовки.

Метою статті є визначення особливостей побудови та взаємних трансформацій грубих моделей біологічних та медичних процесів розвитку.

Розвиток визначаємо залежністю корисного ефекту від витрачених ресурсів. Під **корисним ефектом** розуміємо рівень досягнення цілей лікування. Під

вхідними ресурсами розуміємо все, що може бути перетворене в корисний ефект: гроші, персонал, матеріальні засоби, ліки, апаратура, ефекти діяльності елементів організаційних структур, час тощо.

Найбільш поширеними серед грубих моделей є лінійні, експоненціальні та логістичні (рис. 1). Лінійні та експоненціальні моделі використовують для добре вивчених процесів в обмеженому діапазоні вхідних

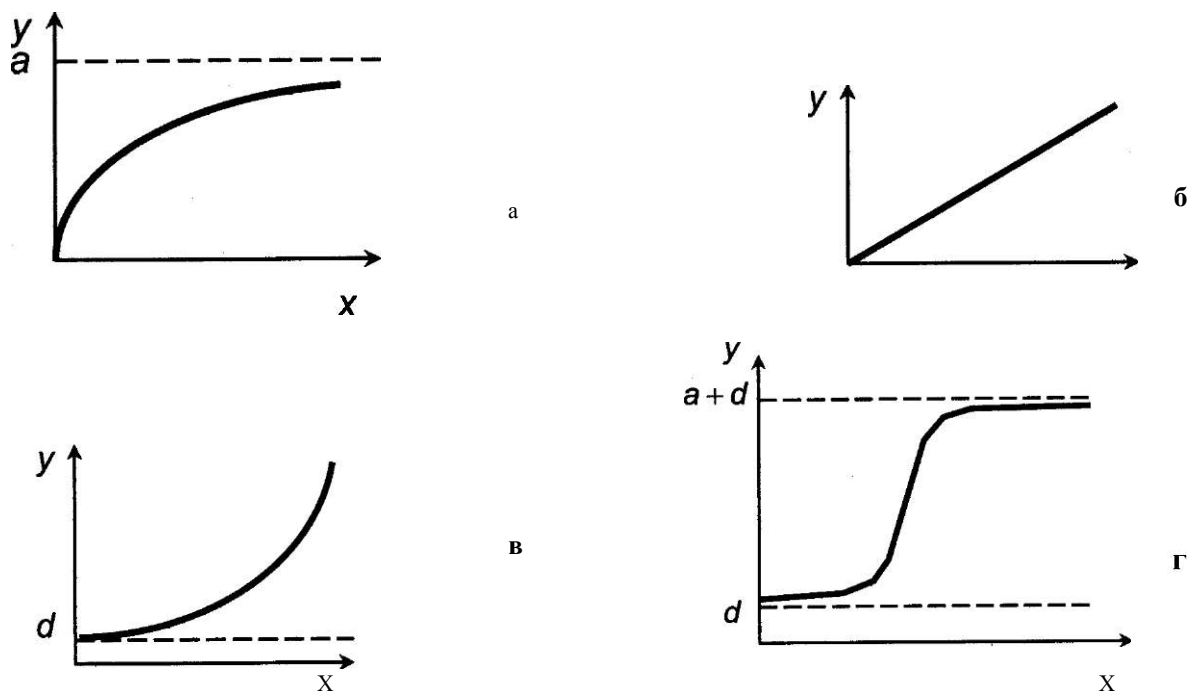


Рис.1. Моделі процесів розвитку:

а) експоненціальне насичення; б) лінійна; в) необмежений експоненціальний зріст; г) логістична.

величин, поведінка яких обумовлена стабільним ресурсним забезпеченням або які знаходяться на одному етапі життєвого циклу. **Експоненціальне зростання з насиченням** використовується в моделях процесів, які досягли межі свого розвитку. Серед моделей **необмеженого експоненціального зростання** найбільш відомий закон Мура, який базується на припущенні відсутності обмежень розвитку.

Якщо ресурсне забезпечення варіюється довільно або розглядається декілька етапів життєвого циклу, то більш адекватна **логістична модель** [3], яка базується на залежності у вигляді звичайного диференціального рівняння яке Р.Л.Кашьяп і А.Р. Рао вважають окремим випадком рівняння Вольтера [4], або у вигляді функції яка є рішенням (1) [3]

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot (y - Y_{min}) \cdot (Y_{max} - y), \quad 1$$

$$y = Y_{min} + \frac{Y_{max} - Y_{min}}{1 + e^{-m \cdot (Y_{max} - Y_{min}) \cdot (x - \Delta x)}} = d + a \cdot SL(x),$$

$$d = Y_{min}, \quad a = Y_{max} - Y_{min},$$

$$SL(x) = \frac{a}{1 + e^{-\frac{4k}{a} \cdot (x - \Delta x)}} = \frac{a}{1 + e^{-\frac{2}{T} \cdot (x - \Delta x)}},$$

де у - вихідний ефект; х - вхідний ресурс; SL (x) - логістична SL-функція, Y_{min} , Y_{max} - нижнє та верхнє обмеження вихідного ефекту; m - постійний коефіцієнт; Δx - абсциса точки симетрії (зсув кривої вздовж осі абсцис); k - тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці симетрії; T- стала ресурсу, яка дорівнює половині ширини діапазону вхідних ресурсів, при яких відбувається інтенсивне зростання ефекту.

Інколи у звичайне рівняння Лотки-Вольтера вводять логістичні компоненти (у вигляді правих частин рівняння (1)), наприклад, для підвищення адекватності моделей "паразит-хазяїн" [5]. Для різних задач (1) може бути записано у різному вигляді, наприклад, в екології з урахуванням "фізики процесу" динаміки

$$\frac{dy}{dt} = m \cdot y \cdot (Y_{max} - y) - s \cdot y, \quad \text{де } y -$$

чисельність популяції, t- час, Y_{max} - несуча спроможність середовища, m, s - характерні сталі народжуваності та смертності. Для моделювання епідеміологічних даних використовують багатомірну логістичну регресію у вигляді моделей із взаємодією та без взаємодії [6].

"Логістичний розвиток є найпростішим і, в той же час, неодноразово підтвердженим на емпіричному

матеріалі описом циклу розвитку системи, коли при виснаженні відповідних ресурсів відбувається перехід з експоненти на логісту" [7]. Прикладами логістичних моделей є: еволюція алкогольного пошкодження печінки [8], вивільнення месалазину із таблеток салофальку [9], динаміка показників рН-метрії [10], частота дивертикульозу залежно від віку пацієнтів [11], динаміка чисельності популяцій та населення [2, 4, 5]; динаміка епідемії [6]; динаміка ризику захворювань після Чорнобильської аварії [12], закон Арндта-Шульца стосовно залежності ефекту лазерної терапії від дози освітлювання [13] (залежність моделюється різницею двох SL- функцій із зсувами $y = SL_1(x - \Delta x_1) - SL_2(x - \Delta x_2)$).

Основні властивості SL-функції [3].

1. **Наявність асимптот:** $y = d$; $y = d + a$.

2. **Симетрія** відносно точки $I(\Delta x; d + 0.5 a)$.

3. **Швидкість зростання ефекту** на лінійній ділянці SL- функції $[\Delta x - T; \Delta x + T]$ приблизно до-

$$\text{рівнює } k = \frac{dSL(\Delta x)}{dx}.$$

4. **Стала ресурсу 8Б - функції T** (є поширенням поняття сталої часу експоненти) дорівнює довжині відрізка асимптоти між абсцисою точки симетрії та точкою перетину осі абсцис з прямою, яка дотична до графіка функції у точці симетрії.

При первинному створенні моделей параметри логістичних залежностей визначають статистично або методом аналогій. Для обох випадків існує простий (на основі лінійних вимірів) **алгоритм визначення параметрів логістичної залежності** (2) [3], а саме послідовно визначити: 1) d , 2) $a + d$, 3) T або k , залежно від постановки задачі, 4) Δx .

Поширеною є ситуація, коли при моделюванні об'єкта спочатку створювались лінійні або експоненціальні моделі. Інформація, яка була при цьому накопичена, спрощує визначення параметрів логістичних моделей.

Перетворення лінійних моделей. Нехай певна лінійна модель задана залежністю $y = a_1 x + a_0$. Встановимо алгоритм визначення параметрів логістичної функції (2).

1. В околиці точки симетрії графік прямої подібний до (2), отже $k = a_1$.

2. \dot{y} і a визначаються з емпіричних даних як мінімально можливі \dot{y} (найчастіше $\dot{y} = 0$) та максимально можливі $a + \dot{y}$ вихідні ефекти. При $\dot{y} = 0$ найчастіше a дорівнює 110-160 % від нормативно визначеного ефекту.

3. Абсциса точки симетрії $\Delta x = (0.5 a + d - a_0) / a_1$ визначається як абсциса середини відрізка прямої, який відсічений обмеженнями d і $a + d$.

Усунення обмежень. Повне усунення обмежень $d' < x < d' + a'$ без будь-яких додаткових умов можливо нелінійним перетворенням координат. Для цього пропонується SL- перетворення координат

$$x = SL'(x') = d' + \frac{a'}{1 + e^{-c'(x' - \Delta x')}}; \quad c' = \frac{4}{a'}; \quad \Delta x' = 0.5a' +$$

d' , де x, x' - обмежена та необмежена змінні; $d', a', c', \Delta x'$ - сталі параметри функції $SL'(x')$ При всіх $x' \in [-\infty; +\infty]$ функція $SL'(x')$ і безперервна, монотонна, така, що диференціюється і має безперервні похідні.

Найбільший ефект від SL-перетворення координат можна отримати у випадку, якщо початкові вирази вже містять деякі SL-функції, аргументами яких є саме ті змінні, до яких планується застосувати SL-перетворення координат. Наприклад, якщо x є аргументом деякої SL-функції $SL(x)$, то після

SL-перетворення координат ми отримуємо складну функцію $SL(SL'y)$ яка може бути апроксимована певною SL-функцією $SL_2(y)$ з похибкою не більше 2%. Така апроксимація дозволяє врахувати обмеження ціною зміни величин параметрів залежностей без зміни структури моделі та структури відповідних аналітичних виразів.

Перетворення експоненціальних моделей. Аналогічно розглянемо алгоритм перетворення експоненціальної функції в логістичну (2). Нехай експоненціальна модель задана у вигляді

$$y = a_0(1 - e^{-\frac{x}{T_e}}) + a_2 \quad \text{або} \quad y = b_0 + b_2 e^{\frac{x}{T_e}}.$$

1. Основним припущенням є співпадання точки симетрії з віссю ординат $\Delta x = 0$. При необхідності після визначення інших параметрів графік логістичної залежності можна зсунути вздовж осі абсцис зміною Δx .

2. Стала часу логістичної функції приблизно дорівнює сталій часу експоненти $T = T_e$.

$$3. \quad d = 2a_2 - a_0; \quad a = 2(a_0 - a_2) \quad \text{або} \quad d = b_0; \quad a = 2b_2.$$

Висновки. В статті проаналізовані особливості лінійних, експоненціальних та логістичних моделей розвитку. Запропоновані алгоритми трансформування лінійних та експоненціальних моделей в логістичні зі збереженням корисної інформації щодо властивостей об'єкта моделювання, яка була накопичена у попередніх моделях.

Подальшими напрямками досліджень має бути розповсюдження розроблених алгоритмів на багатовимірний випадок та розробка алгоритмів трансформації для інших видів моделей розвитку в медицині та біології.

Література

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Моисеев Н.Н. - М.: Наука, 1981. - 488 с.
2. Пригожин И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой / Пригожин И., Стенгерс И. - М.: Прогресс, 1986. - 432 с.
3. Шевченко В. Л. Использование SL-зависимостей для построения моделей развития технологий и упрощения процедур поиска оптимальных решений на примере уравнения Беллмана / Шевченко В. Л. // Системні технології. Регіональний міжвузівський зб. наук. праць. - 2004. - Вип. 6 (35). - С. 148-153.
4. Кашьяп Р.Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным / Кашьяп Р. Л., Рао А.Р.; [пер. с англ.] - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. - 384 с.
5. Мэрди Дж. Модели популяций / Мэрди Дж. // Математическое моделирование. - М.: Мир, 1979. - С. 109-127.
6. Качинський А.Б. Безпека, загрози і ризик: наукові концепції та математичні методи / Качинський А.Б. - К., 2004. - 472 с.
7. Евин И. А. Модели развития и теория катастроф / Евин И. А., Яблонский А.И. // Системные исследования. Методологические проблемы [Ежегодник]. - М.: Наука, 1982. - С. 98-130.
8. Губергриц Н.Б. "Эссенциале Форте Н" и "Эссенциале Н" в гепатологии и гастроэнтерологии / Губергриц Н.Б. // Сучасна гастроентерологія. - 2008: - №5(43). - С. 79-89.
9. Рот М. Воспалительные заболевания кишечника: [практическое руководство] / Рот М., Бернхарт В.; [ред. русс. изд.: В.Голофеевский, С.Ситкин]. - Freiburg Germany: DR. FALK PHARMA GmbH, 2004. - 60 с.
10. Рефлюксна хвороба стравоходу: [посібник] / [під ред. П.Місюни; пер. з польської А.С.Барвінська, В.В.Вашук, І.Д.Герич (заг.ред.) та ін.]. - [Вип.2]. - Львів: Галицька видавнича спілка, 2004. - 176 с.
11. Верманн К. Дивертикулез и дивертикулит толстой кишки / Верманн К., Фрюморген П.; научн. ред. С.Ситкин. - Людвигсбург (Германия): DR. FALK PHARMA GmbH, 2007. - 47 с.
12. Дрозд І.П. Радіаційно уражені регіони: антропоєкологічні ризики / Дрозд І.П., Серкіз Я.І. // Матер. міжнар. конф. "Антропогенно-змінене середовище України: ризики для здоров'я населення та екологічних систем". Спец. вип. журналу "Екологічний вісник". - К.: Чорнобильінтерінформ, 2003. - С.153-166.
13. Шевченко В.Л. Основы рационального применения терапевтических лазеров / Шевченко В. Л. - К.: НПО "Профессор", 2003. - 170 с.